314. Bieberbach ノ Drehungssatz ニ就テ

城　憲　三（阪大工）

§1. 等角寫像論ニ於ケル Bieberbach ノ Drehungssatz ニ就キ，以前ニ私ハ想像ヲ交ジヘテ愚論ヲ述ベタコトガアリ，一度ソノ申譯ヲスル責任ガアルト思ッテキタノデスガ，今度ハドウヤラ成功シタヤウデスカラ見テ頂キタイト思ヒマス。考ヘハ前ノト全然關係アリマセヌ。ツマリ新シク証

明法ヲ発見シタコトニナリマス。私ノ考ヘバカリデナク，ヤハリコノ Satz ノ熱心ナ研究家 M. Kössler ニ負フトコロ甚大デス、私ハ Kössler ノ缺点ヲ見ツケルコトが出來，彼ノ理論ヲ修正シタニ過ギマセヌ。以下ノ拙論ト Kössler ノ論文トヲ對照シテ下サレバ，スベテが分明ニナルカト存ジマス。

(1) $\mathfrak{f}(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$

ヲ $|z|<1$ デ正則單葉函数トスル、コノ集合ヲ S トスル。我々ノ問題ハ集合 S 中デ $\arg \mathfrak{f}'(z)$ ノ grösste Max. ヲ求メルコトデ

$$\underset{|z|\leqq r,\, \mathfrak{f}\subset S}{Max}\left|\arg \mathfrak{f}'(z)\right| \quad (0\leqq r<1)$$

ハ如何ニ表ハサレルカト云フコトデアル。斯様ナ Grenze ノ函数が S 中ノ $f(z)$ デアリトスレバ（存在スル）$\underset{\mathfrak{f}\subset S}{\arg}\mathfrak{f}'(z)$ ノ Kleinste Min. ノオコル函数 $f_1(z)$ ハ $f(z)$ カラ次ノ様ニスグ分カル。

何故ナラバ

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots,$$

$$f_1(z)=z+\overline{a}_2z^2+\overline{a}_3z^3+\cdots\cdots,$$

トスレバ $f_1(z)$ ハ勿論 $|z|<1$ デ正則單葉デ

$$\arg f'(z)=\arg \overline{f_1'(\overline{z})}=-\arg f_1'(\overline{z}), \qquad |z|<1$$

デアルカラデアル。

(2) $\underset{|z|\leqq r,\, \mathfrak{f}\subset S}{Max}\left|\arg \mathfrak{f}'(z)\right|\leqq\varphi(r)$

ナル Genaue Schranke $\varphi(r)$ ヲ今マデニ求メラレタ不完全ナ結果ハ次ノ通リデス。

$$1° \quad \varphi(r)=2\log\frac{1+r}{1-r}, \qquad (\text{Bieberbach})^{1)}$$

$$2° \quad \varphi(r)=\int_0^r \frac{2\sqrt{4-x^2}}{1-x^2}dx, \qquad (\text{Kössler})^{2)}$$

$$3° \quad \varphi(r)=2|a^2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r} \quad (\text{Kössler})^{3)}$$

コンデハ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 1. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則単葉函数トシタルトキハ

$$(3) \quad |\arg f(z)|_{|z|\leqq r} \leqq 2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\eta,$$

コヽニ η ハ $0<\eta<1$ ナル a_2 ニ関係スル常数デアル。但シ a_2 ハ函数

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots, \qquad ノ\ z^2\ ノ係数$$

§2. 証明第一段.

K. Löwner ニ従ヘバ, $\varkappa(\tau)$ ヲ $|\varkappa(\tau)|=1$ $(\tau\geqq 0)$ ナル stetige Funktion トシテ

$$(4) \quad a_2=-2\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}d\tau, \quad a_3=4\left(\int_0^\infty \varkappa(\tau)e^{-\tau}d\tau\right)^2-2\int_0^\infty \varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

ト表ハスコトガ出来ル。従ッテ次ノ基本関係式ガ得ラレル。

---

1) Math. Zeitschr., 4(1919), 295—305.

2) Jahres bericht der D.M.V., 41(1931), 80—82.

3) Věstn. České Spol. Nauk, (1932).

(5) $$a_2^2-a_3=2\int_0^{\infty}\varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$$

変換: $$F(\xi)=\frac{f\left(\frac{\xi+\alpha}{1+\bar{\alpha}\xi}\right)-f(\alpha)}{f'(\alpha)(1-|\alpha|^2)}=\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\cdots\cdots(|\alpha|<1)$$

ニヨレバ $F(\xi)$ ハ又 $|\xi|<1$ ニ於ケル正則単葉函数デ

$$A_2=\frac{f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{2f'(\alpha)}-\bar{\alpha},$$

$$A_3=\frac{1}{6}\left[\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1-|\alpha|^2)^2-6\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\bar{\alpha}(1-|\alpha|^2)+6\bar{\alpha}^2\right]$$

従ッテ

$$A_2^2-A_3=\frac{f''(\alpha)^2(1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2}+\bar{\alpha}^2-\frac{\bar{\alpha}f''(\alpha)(1-|\alpha|^2)}{f'(\alpha)}$$

$$-\frac{1}{6}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}(1-|\alpha|^2)^2+\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\bar{\alpha}(1-|\alpha|^2)-\bar{\alpha}^2$$

(6) $$=-\frac{f'''(\alpha)(1-|\alpha|^2)^2}{6f'(\alpha)}+\frac{f''(\alpha)^2(1-|\alpha|^2)^2}{4f'(\alpha)^2}$$

(6)ニ於テ, 基本関係式 (5) ヲ適用スルト, α ノ代リニ

z $(z=re^{i\varphi},\ |z|\leqq r<1)$ ト書キ

$$-\frac{f'''(z)(1-|z|^2)^2}{6f'(z)}+\frac{f''(z)^2(1-|z|^2)^2}{4f'(z)^2}=2\int_0^{\infty}\varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau$$

トオキ得ル $\varkappa(\tau)$ $(|\varkappa(\tau)|=1,\ \tau\geqq 0)$ が存在スル。或ハ

(7) $$2z^2\frac{f'''(z)}{f'(z)}-3z^2\frac{f''(z)^2}{f'(z)^2}=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^{\infty}\varkappa^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$$

次ノ様ナ函数 $v(z)$ ヲ考ヘテ見ル。

(8) $$v(z)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\equiv\mathcal{R}(v)+i\mathrm{I}(v).$$

$f'(z)\neq 0$ デアルカラ $v(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則デアル、コヽニ,

$$\mathcal{R}(v)=1+\mathcal{R}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right),\quad \mathrm{I}(v)=\mathrm{I}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right).$$

而シテ

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=z\frac{d}{dz}\log f'(z)=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\log f'(z),$$

$$\log f'(z)=\log|f'(z)|+i\arg f'(z).$$

従ッテ，

$$(9)\quad \mathcal{R}(v)=1+\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z);\quad \mathrm{I}(v)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|.$$

次ニ (8) ニヨッテ

$$2zv'(z)-v^2(z)+1=2z\left(\frac{f''}{f'}+z\,\frac{f'''f'-f''^2}{f'^2}\right)-\left(1+z\frac{f''}{f'}\right)^2+1$$

$$=2z\frac{f''}{f'}+2z^2\frac{f'''}{f'}-2z^2\frac{f''^2}{f'^2}-1-2z\frac{f''}{f'}-z^2\frac{f''^2}{f'^2}+1$$

$$=2z^2\frac{f'''}{f'}-3z^2\frac{f''^2}{f'^2}.$$

コノ結果ハ (7) ノ左辺ト一致スルカラ

$$(10)\quad 2zv'(z)-v^2(z)+1=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{X}^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau,$$

$zv'(z)=-i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}v(z)$ デアルカラ (8) ニヨッテ

$$2zv'(z)-v^2(z)+1=-2i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathcal{R}(v)+i\mathrm{I}(v)\right)$$

$$-\left(\mathcal{R}(v)+i\mathrm{I}(v)\right)^2+1$$

$$=-2i\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi}+2\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\varphi}-\mathcal{R}^2-2i\mathcal{R}\mathrm{I}+\mathrm{I}^2+1$$

トナルカラ (10) ノ式ハ次ノ様ニナル。

$$2\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\varphi}-2i\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\varphi}-\mathcal{R}^2-2i\mathcal{R}\mathrm{I}+\mathrm{I}^2+1=\frac{-24z^2}{(1-|z|^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{X}^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau.$$

上式ノ實数部分，虚数部分ヲ等置シテ

$$(11)\quad 2\frac{\partial I}{\partial\varphi}+I^2+1-R^2=R\left[\frac{-24r^2e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2}\cdot\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right],$$

$$(12)\quad \frac{\partial R}{\partial\varphi}+RI=\mathcal{I}\left[\frac{12r^2e^{i2\varphi}}{(1-r^2)^2}\cdot\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right].$$

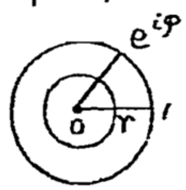
我々ハ(12)ノ應用ヲ考ヘテ行クノデアルガ，途中再々Cauchy-Riemannノ関係式

$$(13)\quad r\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\partial I}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial R}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial I}{\partial r}$$

ヲ用フ。

§3. 証明第二段

$|z|=r\ (0\leqq r<1)$ ナル r ヲ任意ニキメテ z ハ $|z|=r$ 上ニアルトスル。$\underset{|z|=r}{\arg f'(z)}$ ガ Max ニナル様ナ φ ニ對シテハ



$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f'(z)=0$$

デアルカラ，カヽル φ ヲ fix シ $\max_S \arg \mathfrak{f}'(z)=\arg f'(re^{i\varphi})$ トシヨウ。S ニ属スル任意ノ函数 $\mathfrak{f}$ モ上ノ φ ニ對シ

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg\mathfrak{f}'(z)=0$$

トシテオク．（可能）コノトキハ (9) ヨリ $R(v)=1$．従ッテ(12)ヨリ

$$\frac{\partial R}{\partial\varphi}+I=\mathcal{I}\left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{K}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right],$$ φ ハ一定

関係式(13)ヲ用ヒテ上式ハ

$$-r\frac{\partial I}{\partial r}+I=\mathfrak{I}\left[\frac{12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{X}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right]$$

トナリ或ハ

$$(14)\quad r\frac{\partial I}{\partial r}-I=\mathfrak{I}\left[\frac{-12r^2}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{X}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right].$$

サテ，又 (13) ニヨリ

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\arg f'(z)}{r}=2\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|=2(a_2e^{i\varphi}+\bar{a}_2e^{-i\varphi})+(r),$$

コヽニ (r) ハ Ordnung r ノ Glieder ヲ表ハス．特ニ $r=0$ ノトキ，φ ノ値ヲ求メルト，

$$(15)\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}-\arg a_2,\quad \varphi_2=\frac{3\pi}{2}-\arg a_2.$$

且ツ又

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|=i(a_2e^{i\varphi}-\bar{a}_2e^{-i\varphi})+(r)$$

デアツテ $\frac{I(v)}{r}$ ハ $r=0$ ノトキハ (a) ノ式：$I(v)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'(z)|$ ニヨツテ $2|a_2|$ 又ハ $-2|a_2|$．$\frac{I(v)}{r}=K(r,\varphi)$ トオケバ

$$I(v)=r\cdot K(r,\varphi)$$

デ

$$r\frac{\partial I}{\partial r}-I=r\left(K(r,\varphi)+r\frac{\partial K}{\partial r}\right)-I=r^2\frac{\partial K}{\partial r}.$$

即チ (14) ヨリ

$$(16)\quad \frac{\partial K}{\partial r}=\mathfrak{I}\left[\frac{-12}{(1-r^2)^2}\int_0^\infty \mathcal{X}^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right]$$

(16) ニ於イテ

$$\chi(\tau)=e^{i\vartheta(\tau)}=\cos\vartheta(\tau)+i\sin\vartheta(\tau),$$

$$\left|\Im\int_0^\infty-\chi^2(\tau)e^{i2\varphi}e^{-2\tau}d\tau\right|=\left|\int_0^\infty\sin 2(\varphi+\vartheta(\tau))e^{-2\tau}d\tau\right|,$$

而シテ φ ノ値トシテ (15) ニヨリ得ル

$$2\varphi_1=\pi-2\arg a_2,\quad 2\varphi_2=3\pi-2\arg a_2$$

ヲ代入シテ

$$=\left|\int_0^\infty\sin 2(\arg a_2-\vartheta(\tau))e^{-2\tau}d\tau\right|$$

$$=\frac{1}{2}\eta$$

トオケバ $0\leqq\eta<1$. $a_2=-2\int_0^\infty\chi(\tau)e^{-\tau}d\tau$ ニシテモシ $\tau\geqq 0$ ニ對シテ $\sin 2(\arg a_2-\vartheta(\tau))=1$ デアルト云フ特種ナル $\vartheta(\tau)$ ニ對シテハ Kössler ノ結果ト一致スルケレドモ，コノトキハ實ハ (12) ノ式ノ成立スル場合ニハ起ラナイノデアル。
コヽニ Kössler ノ缺陥ガアル。

故ニ

$$\frac{\partial K}{\partial r}\leq\frac{6}{(1-r^2)^2}\cdot\eta\quad(\mathfrak{f}=f\text{ ナルトキニ等号成立ス})$$

積トシテ $K(0,\varphi)\leq 2|a_2|$ ナルコトヨリ

$$(17)\quad K(r,\varphi)\leq 2|a_2|+\left(\frac{3r}{1-r^2}+\frac{3}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)\eta.$$

而シテ $K(r,\varphi)=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\log|f'|=\dfrac{\partial}{\partial r}\arg f'(z)$ デアル

カラ，再ビ (17) ヲ積分シテ

$$(18)\quad \arg f'(z)\leqq 2|a_2|r+\frac{3}{2}r\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\eta.\quad(\arg f'(0)=1)$$

$$\frac{1}{2}\eta = \left|\int_0^\infty \sin 2(\arg a_2 - \vartheta(\tau))\, e^{-2\tau} d\tau\right|$$ ニ於テ

$$a_2 = -2\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau = -2\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau - i2\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

ヲ用フレバ

$$\arg a_2 = \arc\tan \frac{\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}{\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}$$

デアルカラ

$$(19)\qquad \eta = \left|2\int_0^\infty \sin 2\left\{\arc\tan\frac{\int_0^\infty \sin\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau}{\int_0^\infty \cos\vartheta(\tau)e^{-\tau}d\tau} - \vartheta(\tau)\right\}e^{-2\tau}d\tau\right|$$

而シテ定理1ハ次ノ様ニ書ケル。

定理2. $$|\arg f'(z)|_{|z|\le r} \le 4\left|\int_0^\infty e^{i\vartheta(\tau)}e^{-\tau}d\tau\right| r + \frac{3}{2} r\log\frac{1+r}{1-r}\cdot\eta.$$

η ハ(19)デ與ヘラル。

或ハ又 Valiron-Landau ノ定理[1]ヲ用ヒテ定理ノ結果ヲ絶對常数ノミヲ用ヒテ(f ニ依存スル a_2, η ヲ除ク)表現スルコトモ可能デアル。

何レニシテモ最後ノ Ausdruck ハナルベク簡單ニスル

---

1) $\left|\int_0^\infty \chi^2(\tau)e^{-2\tau}d\tau\right| \le M$ $(0\le M\le \frac{1}{2})$ ナルトキハ $\left|\int_0^\infty \chi(\tau)e^{-\tau}d\tau\right| \le \nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right)$,

但シ ν ヲ $(\nu+\frac{1}{2})e^{-2\nu} = \frac{1}{4}+\frac{M}{2}$ ナル方程式ノ根トスレバ

$$\nu\left(\frac{1}{4}+\frac{M}{2}\right) = (\nu+1)e^{-\nu}$$

トシテ，Kössler ノ結果ハソノ Ausdruck ニ於テ最良ノモノデアルラシイ。